© *С.К.Соболев*. Краткие лекции по линейной алгебре.

Лекция 3

Лекция 3. Теорема о существовании ортонормированного базиса и процесс ортогонализации Грама – Шмидта (без док-ва). Линейные операторы и их матрицы (определение, примеры). Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису, инвариантность ее определителя. Подобные матрицы. Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

3.1. Теорема о существовании ортонормированного базиса.

Теорема. *В любом конечномерном евклидовом пространстве есть ортонормированный базис.*
Поясним эту теорему. Если евклидово пространство конечномерно, то у него, как мы знаем, обязательно есть базис, но не обязательно ортонормированный. Теорема говорит, что найдется и ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, т.е. такой что $\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$.

Рассмотрим конкретные пространства. Пространства геометрических векторов, его стандартный базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ уже ортонормированный. Аналогично в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$: Его стандартный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, где

$$\boldsymbol{e}_1 = (1; 0; 0; ...; 0), \boldsymbol{e}_2 = (0; 1; 0; ...; 0), ..., \boldsymbol{e}_n = (0; 0; ...; 0; 1),$$

тоже ортонормированный, как легко убедиться. Так в чем же суть теоремы? А вот в чем.
Во-первых, теорема перестает быть тривиальной в **пространствах функций**, например, пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением, скажем, на отрезке $[0; 1]$: для двух многочленов $p(t)$ и $q(t)$ их скалярное произведение равно

$$\left(p(t), q(t)\right) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Здесь стандартный базис $\{1; t; t^2; ...; t^n\}$ даже не ортогональный: $(t^k, t^m) = \int_0^1 t^k t^m dt = \frac{1}{m+k+1} \neq 0$.

А как же выглядит ортонормированный базис этого пространства и как его получить?
Другой пример: подпространства. Например, множество всех решений системы однородных линейных уравнений, и даже одного такого уравнения, например, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, есть подпространство $S \sqsubset \mathbf{R}^n$, в данном случае двумерное подпространство $S \sqsubset \mathbf{R}^3$, Поскольку общее решение этого уравнения имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

пространство решений S этого уравнения имеет базис (ФСР), состоящий из двух арифметических векторов $\boldsymbol{f}_1 = (-2; 1; 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1; 0; 1)$, который даже не ортогонален: $(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_2) = -2 \neq 0$. Теорема говорит, что в этом подпространстве имеется ортонормированный базис. Как его построить?

3.2. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Ответом служит так называемый ***процесс (алгоритм) ортогонализации Грама – Шмидта***.
Пусть дан какой то базис $\{\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; ...; \boldsymbol{a}_n\}$ подпространства S евклидова пространства E (S может и совпадать со всём пространством E). Алгоритм последовательно строит попарно ортогональные векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n \in S$ такие, что для любого k, $1 \leq k \leq n$ векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_k$ образуют базис в линейной оболочке векторов $\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2; ...; \boldsymbol{a}_k$, в частности, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$ образуют ортогональный базис в самом подпространстве S. Затем, нормируя векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$, получаем ортонормированный базис.

Шаг 1. Положим $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$.

Шаг $(k+1)$, $1 \le k < n$. Пусть попарно ортогональные векторы $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_k$ уже построены. Вектор $\boldsymbol{b}_{k+1}$ ищем в виде $\boldsymbol{b}_{k+1} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + ... + \lambda_k \boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}$, где коэффициенты λ_i, $1 \le i \le k$, выбираем так, чтобы $\boldsymbol{b}_{k+1}$ был ортогонален всем векторам $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_k$: $(\boldsymbol{b}_{k+1}, \boldsymbol{b}_i) = 0$, отсюда $\lambda_i = -\dfrac{(\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_i)}{\|\boldsymbol{b}_i\|^2}$, $1 \le i \le k$.

Замечание 1. Алгоритм работает и для системы линейно зависимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$. В этом случае, если на каком-то шаге вектор $\boldsymbol{a}_{k+1}$ линейно зависим от векторов $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$, то вектор $\boldsymbol{b}_{k+1}$ получится нулевым, его надо отбросить. В итоге алгоритм строит ортогональный базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$.

Замечание 2. Алгоритм можно модифицировать так, чтобы он сразу строил ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ...\}$ линейной оболочки ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$:

Шаг 1*. Положим $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1$.

Шаг $(k+1)$*, $1 \le k < n$. Пусть попарно ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_k$ уже построены.
Вектор $\boldsymbol{b}_{k+1}$ ищем в виде $\boldsymbol{b}_{k+1} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + ... + \lambda_k \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{a}_{k+1}$, где коэффициенты λ_i, $1 \le i \le k$, выбираем так, чтобы $\boldsymbol{b}_{k+1}$ был ортогонален всем векторам $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_k$: $(\boldsymbol{b}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i) = 0$, отсюда $\lambda_i = -(\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{e}_i)$, $1 \le i \le k$
Если $\boldsymbol{b}_{k+1} = \boldsymbol{0}$, то этот вектор отбрасываем. Иначе $\boldsymbol{e}_{k+1} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_{k+1}\|}\boldsymbol{b}_{k+1}$.

Пример. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке четырех арифметических пятимерных векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = (1; 1; 0; 1; 1), \boldsymbol{a}_2 = (2; 3; 1; -2; 1), \boldsymbol{a}_3 = (1; 0; -1; 5; 2), \boldsymbol{a}_1 = (3; 2; -1; -3; 2)$$

Решение. Следуем вышеуказанному (первому) алгоритму:
1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1; 1; 0; 1; 1)$,

2) $\boldsymbol{b}_2 = \lambda \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_1$, где $\lambda = -\dfrac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} = -\dfrac{4}{4} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2 = (1; 2; 1; -3; 0)$;

3) $\boldsymbol{b}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3$, где

$$\lambda_1 = -\frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} = -\frac{8}{4} = -2,\ \lambda_1 = -\frac{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2} = -\frac{-15}{15} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{b}_3 = -2b_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3 = (0; 0; 0; 0; 0) = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

Вектор $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ $\Rightarrow$ векторы $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ отбрасываем.
Продолжаем алгоритм:
4) $\boldsymbol{b}_4 = \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_4$, где

$$\mu_1 = -\frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_4)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} = -\frac{4}{4} = -1,\ \mu_2 = -\frac{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_4)}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2} = -\frac{15}{15} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{b}_4 = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3 = (-1; -1; -2; -1; 1).$$

Осталось нормировать полученный ортогональный базис $\{\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2; \boldsymbol{b}_4\}$, получится искомый ортонормированный базис, состоящий из трех векторов:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 = \left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\boldsymbol{b}_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{15}}; \tfrac{2}{\sqrt{15}}; \tfrac{1}{\sqrt{15}}; -\tfrac{3}{\sqrt{15}}; 0\right);$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_4\|}\boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}\boldsymbol{b}_4 = \left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}; -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}; -\tfrac{1}{\sqrt{2}}; -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right).$$

Замечание. Вышеописанный алгоритм ортогонализации позволяет из стандартного базиса построить ортогональный базис в пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением в виде интеграла по некоторому отрезку. Например, для $n=3$ и отрезка $[-1;1]$ получим такие ортогональные многочлены:

$$p_0(t)=1,\ p_1(t)=t,\ p_2(t)=t^2-\frac{1}{3},\ p_3(t)=t^3-\frac{3}{5}t.$$

Эти многочлены (точнее, некоторые многочлены, им пропорциональные) называются **многочленами Лежандра**. Ели же взять отрезок $[0;1]$, то получатся другие ортогональные многочлены: $q_0(t)=1, q_1(t)=t-\frac{1}{2}, q_2(t)=t^2-t+\frac{1}{6}, q_3(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}.$

3.3. Линейные операторы и их матрицы (определение, примеры). Термины **отображение**, **функция** и **оператор** являются в какой-то степени синонимами. Первый термин – самый общий, второй больше используется в математическом анализе, а третий – в линейной алгебре, которую мы сейчас изучаем.

Определение. ***Оператором*** называется отображение $\mathcal{A}$ из одного линейного пространство L_1 в другое (возможно, то же самое) линейное пространство L_2, символически: $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$. Это значит, что если $\boldsymbol{x}\in L_1$,то $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\in L_2$. Вектор $\boldsymbol{y}=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ называется ***образом*** вектора $\boldsymbol{x}$.

В частном случае, когда второе линейное пространство есть $\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$, т.е. когда значения оператора – обычные числа, оператор называется ***функционалом***. Если $L_1=L_2=L$, то про оператор $\mathcal{A}: L\to L$ говорят, что он ***действует*** в пространстве L.

Оператор $\mathcal{A}: L_1\to L_2$ называется ***линейным***, если для всех векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L_1$ и чисел $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$:

$$\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\beta\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{y}).$$

Аналогично определяется ***линейный функционал***.

Пример. Пусть $\boldsymbol{a}$ – фиксированный ненулевой геометрический вектор. Рассмотрим операторы, действующие в пространстве $\boldsymbol{V}$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a};$$

$\mathcal{B}(x)=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$ (векторное произведение).

Первый оператор не линейный, т.к.

$$\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a},$$

$$\alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\beta\mathcal{A}(\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+\beta(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}\neq\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})$$

если $\alpha+\beta\neq 1$.

Второй оператор линейный, в самом деле, по свойствам векторного произведения векторов:

$$\mathcal{B}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=[\boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})]=\alpha[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]+\beta[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}]=\alpha\cdot\mathcal{B}(\boldsymbol{x})+\beta\cdot\mathcal{B}(\boldsymbol{y}).$$

Пример. Зададим в пространстве $\boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$ два функционала J_1 и J_2, а именно, для функции $x(t)\in C_{[a;\,b]}$ положим.

$$J_1(x(t))=\int_a^b x(t)\,dt,\quad J_2(x(t))=\int_a^b\sqrt{1+x^2(t)}\,dt$$

Очевидно, что первый функционал линейный, а второй нет.

Действие линейного оператора в конечномерном пространстве вполне описывается его матрицей. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}: L_1\to L_2$, $\dim L_1=n$, $\dim L_2=m$, и в пространствах L_1 и L_2 известны базисы $\varepsilon=\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ и $\varphi=\{\boldsymbol{f}_1,\dots\boldsymbol{f}_m\}$ соответственно. Разложим образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$, т.е. векторы $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)$ по базису φ:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)=a_{1i}\boldsymbol{f}_1+a_{2i}\boldsymbol{f}_2+\dots+a_{mi}\boldsymbol{f}_m,\ i=1,2,\dots,n.$$

Полученные коэффициенты запишем по столбцам в виде матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

размером $m\times n$. Эта матрица и называется ***матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}: L_1\to L_2$ в базисах ε и φ этих пространств.

Тождественным оператором называется оператор $\mathcal{E}: L\to L$, который каждый вектор $\boldsymbol{x}$ оставляет неизменным: $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}\in L$. Очевидно, что тождественный оператор линейный и его матрица в любом базисе – единичная.

Теорема. *Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}: L_1\to L_2$ с матрицей A в базисах ε и φ , X – столбец координат вектора $\boldsymbol{x}\in L_1$ в базисе ε. Тогда Y – столбец координат вектора $\boldsymbol{y}=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\in L_2$ в базисе φ тогда и только тогда, когда выполняется матричное соотношение: $Y = AX$.*

Если оператор $\mathcal{A}: L\to L$ действует в линейном пространстве L размерности n с базисом ε, матрица оператора в базисе ε квадратная, её столбцами являются координаты в базисе ε образов базисных векторов.

Пример. Найдем в базисе $\{\boldsymbol{i};\boldsymbol{j};\boldsymbol{k}\}$ матрицу B линейного оператора $\mathcal{B}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$, $\mathcal{B}(x)=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}]$, где вектор $\boldsymbol{a}=(p;q;r)=p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k}$.

Решение. Найдем образы базисных векторов:

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{i})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=r\boldsymbol{j}-q\boldsymbol{k};\ \mathcal{B}(\boldsymbol{j})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-r\boldsymbol{i}+p\boldsymbol{k};\ \mathcal{B}(\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=q\boldsymbol{i}-p\boldsymbol{j}.$$

Матрица B состоит из координат полученных векторов, записанных по столбцам:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

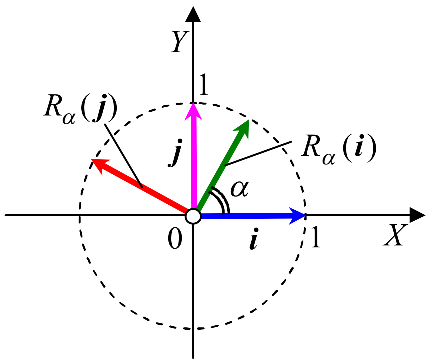
Пример. Поворот $\mathcal{R}_\alpha$ на угол α в в положительном направлении (против часовой стрелки) плоскости – тоже линейный оператор. Найдем его матрицу R_α в стандартном базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$.

Решение. Найдем координаты образов базисных векторов:

$$\mathcal{R}_\alpha(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha,\ \mathcal{R}_\alpha(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha$$

Следовательно, матрица этого линейного оператора

$$R_\alpha=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



3.4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

При переходе к другому базису меняются не только координаты вектора, но и матрица линейного оператора, действующего в данном линейном пространстве.

Теорема. *Пусть в линейном пространстве L имеется старый базис $\varepsilon=\{\boldsymbol{e}_1;\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ и новый базис $\varphi=\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_n\}$ с матрицей перехода $P=P_{\varepsilon\to\varphi}$. Пусть далее в пространстве L действует линейный оператор $\mathcal{A}: L\to L$, в старом базисе его матрица A, а в новом A' . Тогда*

$$A'=P^{-1}AP \qquad (*)$$

$$A=PA'P^{-1} \qquad (**)$$

Доказательство **(*)** опирается на лемму из алгебры матриц.

Лемма. *Пусть дана матрица A размером* $m\times n$. *Пусть* ***для всякой*** *матрицы B размером* $n\times k$ *произведение* AB *(оно существует!) есть нулевая матрица (размером* $m\times k$ *),* $AB=O$. *Тогда и сама матрица A тоже нулевая,* $A=O$.

Доказательство леммы. Элементы матрицы AB состоят из произведений строк матрицы A на столбцы матрицы B, следовательно, произведение любой строки $A_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$ (размером $1\times n$) матрицы A на **произвольный** столбец X размером $n\times 1$ есть число 0. Возьмем в качестве $X=A_i^{\mathrm{T}}$, тогда $A_iA^T=(a_{i1})^2+(a_{i2})^2+\ldots+(a_{in})^2=0\Rightarrow$ строка A_i состоит целиком из нулей $\Rightarrow$ вся матрица $A=O$.

Доказательство теоремы. Пусть X и X' – столбцы координат вектора $\boldsymbol{x}\in L$ в старом и новом базисах соответственно, Y и Y' – столбцы координат его образа $\boldsymbol{y}=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ в этих же базисах. Тогда

$$Y=AX,\quad Y'=A'X',\quad X=PX',\quad Y=PY'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y'=P^{-1}Y=P^{-1}AX=P^{-1}APX'$$

Мы получили, что $A'X'=(P^{-1}AP)X'\Leftrightarrow\left(A'-P^{-1}AP\right)X'=O$ для любого столбца $X'\Rightarrow$

$$A'-P^{-1}AP=O\Rightarrow A'=P^{-1}AP\text{, т.е (*).}$$

Умножив это равенство слева и справа на P и P^{-1}, получаем (**).

Пример. Найти матрицу оператора поворота на угол 90° в базисе $\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_2=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$.

Решение Матрица перехода $P=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$, её обратная $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, Матрица оператора поворота на 90° в исходном базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$:

$$R=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

а в новом базисе

$$R'=P^{-1}RP=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&-4\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-10&-25\\5&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\1&2\end{pmatrix}.$$

3.5. Инвариантность определителя, ранга и следа матрицы линейного оператора при замене базиса. Подобные матрицы.

Определение. Две квадратные матрицы порядка n A и B называются ***подобными***, обозначение $A\approx B$, если найдется невырожденная квадратная матрица P порядка n такая, что $B=P^{-1}AP$.

Ясно, что матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах подобны.

Свойства подобных матриц.

Теорема. *Отношение подобия квадратных матриц порядка n рефлексивно, симметрично и транзитивно. Это значит, что для любых квадратных матриц A, B и C*

(а) $A\approx A$;

(б) $A\approx B\Rightarrow B\approx A$;

(в) $A\approx B, B\approx C\Rightarrow A\approx C$.

Определение. ***Следом*** квадратной матрицы $A=(a_{ij})$, обозначение $\operatorname{Tr} A$, называется сумма все элементов её главной диагонали:

$$\operatorname{Tr} A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

Теорема (из 1 семестра). *Пусть A и B две квадратные матрицы одного порядка. Тогда*

$$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=\det(BA)$$

Теорема. *Пусть A – произвольная матрица размером* $m\times n$, *P и Q – невырожденные матрицы порядка m и n соответственно. Тогда* $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(PA)=\operatorname{rg}(AQ)=\operatorname{rg}(PAQ)$

Теорема. *Пусть A и B две квадратные матрицы размером* $m\times n$ *и* $n\times m$ *соответственно (в частности, они могут быть квадратными одного порядка). Тогда матрицы AB и BA (они обе существуют!) имеют одинаковый след:*

$$\operatorname{Tr}(AB)=\operatorname{Tr}(BA)$$

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&4&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&1\end{pmatrix},$$

тогда

$$AB=\begin{pmatrix}-2&11\\-2&17\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}5&11&2\\5&9&3\\2&4&1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Tr}(AB)=-2+17=15,\ \operatorname{Tr}(BA)=5+9+1=15.$$

Теорема. *Если матрицы A и B подобны, то у них одинаковы ранг, определитель и след, т.е.*

$$A\approx B\Rightarrow \operatorname{rg}A=\operatorname{rg}B,\ \det A=\det B,\ \operatorname{Tr}A=\operatorname{Tr}B.$$

Доказательство. По условию, $B=P^{-1}AP$ для некоторой невырожденной матрицы P, $\det(P)=\Delta\neq 0$. Тогда:

$$\operatorname{rg}B=\operatorname{rg}\left(P^{-1}AP\right)=\operatorname{rg}(A),$$

$$\det(B)=\det\left(P^{-1}AP\right)=\det(P^{-1})\det(A)\det(P)=\frac{1}{\Delta}\cdot\det A\cdot\Delta=\det A,$$

$$\operatorname{Tr}(B)=\operatorname{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right)=\operatorname{Tr}\left((AP)P^{-1}\right)=\operatorname{Tr}\left(A\left(PP^{-1}\right)\right)=\operatorname{Tr}(A).$$

Следствие. *Матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах имеют одинаковый ранг, определитель и след.*

3.6. Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами.

Определение. Пусть даны операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, отображающие линейное пространство L_1 в линейное пространство L_2. ***Произведением оператора*** $\mathcal{A}$ ***на число*** $\lambda\in\mathbf{R}$ называется оператор $\mathcal{C}=\lambda\mathcal{A}$, $\mathcal{C}:L_1\to L_2$, определяемый формулой $\mathcal{C}(\boldsymbol{x})=\lambda\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x}\in L_1$.. ***Суммой*** операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{D}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{D}:L_1\to L_2$, определяемый формулой $\mathcal{D}(\boldsymbol{x})=\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x}\in L_1$.

Если даны операторы $\mathcal{A}:L_1\to L_2$ и $\mathcal{B}:L_2\to L_3$, то их ***композицией*** называется оператор $\mathcal{F}=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$, $\mathcal{F}:L_1\to L_3$ определяемый формулой $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})=\mathcal{B}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\right)$ для любого $\boldsymbol{x}\in L_1$.

Отметим, что, вообще говоря, $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ (но есть исключения, см. ниже)

В частном случае, когда операторы действуют в одном и том же линейном пространстве L, их произведение на число, сумма и композиция тоже действуют в том же пространстве L.

В частности, тогда определена степень оператора $\mathcal{A}$ с любым натуральным показателем:

$$\mathcal{A}^2\underset{def}{=}\mathcal{A}\circ\mathcal{A},\ \mathcal{A}^{n+1}\underset{def}{=}\mathcal{A}^n\circ\mathcal{A}.$$

Можно доказать, что $\mathcal{A}^n\circ\mathcal{A}^m=\mathcal{A}^{n+m}=\mathcal{A}^m\circ\mathcal{A}^n$ для любых натуральных m и n. Кроме того, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{E}=\mathcal{A}$.

Теорема. *Если операторы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *линейные, то операторы* $\mathcal{C}=\lambda\mathcal{A}$, $\mathcal{D}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *и* $\mathcal{F}=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ *тоже линейные.*

Теорема. *Если в некотором базисе, линейные операторы* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}=\lambda\mathcal{A}$, $\mathcal{D}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *и* $\mathcal{F}=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ *имеют матрицы A, B, C, D и F соответственно, то*

$$C=\lambda A,\ D=A+B,\ F=BA.$$

Пример. Найти R^{12}, где $R=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$

Решение. Матрица $R = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

есть результат умножения числа 2 на матрицу оператора поворота на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, R^{12} есть матрица 12-кратного умножения на число 2, т.е. умножения на 2^{12}, и 12-кратного поворота на угол $\frac{\pi}{3}$, т.е. поворота на угол 4π. Последний оператор поворота есть тожественный (ничего не меняющий) оператор, его матрица единичная. Следовательно,

$$R^{12} = 2^{12}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^{12} = 4096 \cdot E = \begin{pmatrix} 4096 & 0 \\ 0 & 4096 \end{pmatrix}.$$

3.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Во многих прикладных задачах часто представляют интерес векторы, образы которых при действии линейным оператором им пропорциональны.

Определение. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве L. Ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ называется **собственным**, если для некоторого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняется $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, при этом число λ называется ***собственным значением***, соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Примеры. (1) Для оператора поворота в плоскости на угол α, $0 < \alpha < 360°$, собственные векторы существуют только если $\alpha = 180°$, и тогда собственный вектор – любой ненулевой, а собственное значение равно -1.

(2) Для оператора ортогонального проектирования на данную плоскость π в пространстве $\boldsymbol{V}$ собственные векторы такие:

(а) любой ненулевой вектор, параллельный плоскости π (собственное число равно 1),

(б) любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости π (собственное число равно 0).

(3) для оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ (в пространстве всех функций $f(t)$, имеющих производные любого порядка) собственным «вектором» является любая показательная функция $f(t) = a^t$, а соответствующим собственным значением – число $\lambda = \ln a$:

$$D(a^t) = \frac{d}{dt}\left(a^t\right) = a^t \ln a .$$